Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа
25.03.2017.

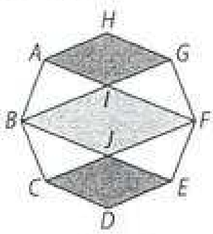
VII разред

1. Одреди последњу цифру броја
$$(9-5)\cdot(9^2-5^2)\cdot(9^3-5^3)\cdot\ldots\cdot(9^{10}-5^{10}).$$

2. У сваком темену квадрата написан је по један природан број. Сва четири броја су различита. Затим је на свакој страници квадрата написан производ два броја који су записани у теменима спојеним том страницом. Збир четири добијена производа је 124. Одреди збир бројева у теменима квадрата.

3. У четвороуглу $ABCD$ углови код темена A, B и D су од 45°.
а) Докажи да су праве AC и BD међусобно нормалне и да је $AC = BD$.
б) Одреди површину четвороугла $ABCD$ ако је $BD = 10\text{cm}$.

4. На слици је правилан осмоугао $ABCDEFGH$. Докажи да је збир површина четвороуглова $AIGH$ и $CDEJ$ једнак површини четвороугла $BJFI$.



5. Јоца треба да на рачунару умањи неку слику на 31,2% њене оригиналне величине. Програм који има на располагању омогућава само смањивање слика на p% њихове почетне величине, где $p \in \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. Како Јоца може да добије тражено смањење, примењујући расположиви програм двапут узастопно? Одреди сва решења.

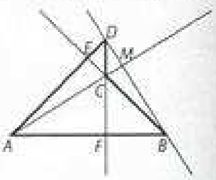
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 150 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак различит од кључа. Бодовање прилагодити решењу.

1. Последње цифре бројева $9, 9^2, 9^3, \dots, 9^{10}$ су, редом, 9, 1, 9, 1, ..., 1 [**5 поена**], а последња цифра броја 5^n је 5, па су последње цифре датих чинилаца, редом, 4, 6, 4, 6, ..., 6 [**5 поена**]. Множењем се добијају бројеви чије су последње цифре редом 4, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 6, 4, 4, па је тражена цифра 4 [**10 поена**].

2. Нека су *a*, *b*, *c*, *d* бројеви написани у теменима квадрата, тако да су *a* и *c* бројеви у супротним теменима. Тада су на страницама квадрата написани бројеви *ab*, *bc*, *cd*, *da*. Како је збир производа једнак $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 124$ [**10 поена**], а једини начин да се 124 напише у облику производа два броја већа од 2 је $124 = 4 \cdot 31$, то је збир бројева у теменима квадрата једнак $(a + c) + (b + d) = 4 + 31 = 35$ [**5 поена** за резултат + **5 поена** за образложење да је јединствен].



3. а) Нека је *E* пресек правих *AD* и *BC*, *F* пресек правих *AB* и *DC* и *M* пресек правих *AC* и *BD*. Троуглови *ABE* и *ADF* имају по два угла од 45°, па су (једнакокрако)-правоугли, те је $BE \perp AD$ и $DF \perp AB$, тј. *BE* и *DF* су висине троугла *ABD*, а тачка *C* је његов ортоцентар. Но, онда и права *AC* садржи висину тог троугла, тј. $AC \perp BD$ [**8 поена**]. Према доказаном $AE = BE$ и $EC = ED$, па су правоугли троуглови *AEC* и *BED* подударни (СУС), одакле је $AC = BD$ [**6 поена**].

Напомена: Ако се прво докаже да је $AC=BD$ (могуће је без коришћења њихове нормалности), бодовати са 8 поена, а доказ нормалности (могуће без помињања ортоцентра) са 6 поена.

б) Тражена површина четвороугла је једнака

$$P_{ABD} - P_{BDC} = \frac{1}{2}BD \cdot AM - \frac{1}{2}BD \cdot CM = \frac{1}{2}BD \cdot (AM - CM) = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 50\text{cm}^2$$ [6 поена].

4. (**МЛ 51/2**) *Прво решење*. Како је $\measuredangle FGB = \measuredangle FAB = 90^\circ$, а $\measuredangle HGI = \measuredangle HAI = 45^\circ$ и $AH = HG$, следи да је четвороугао *AIGH* ромб. Исто важи за четвороугао *CDEJ* [**6 поена**]. Нека је *a* дужина странице датог осмоугла. Тада је $P_{AIGH} = P_{CDEJ} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$ [**7 поена**]. Четвороугао *BJFI* је такође ромб са оштрим углом од 45° и страницом $a\sqrt{2}$, па је његова површина $P_{BJFI} = a^2\sqrt{2}$ [**7 поена**]. Одатле следи тврђење.

Друго решење. Као у првом решењу се доказује да је *AIGH* паралелограм [**6 поена**]. Нека је *P* подножје нормале из тачке *A* на праву *BG*. *AH* је страница осмоугла, одговарајућа висина је једнака *AP*. Из једнакокраког правоуглог троугла *ABP* је $AP = AB\dfrac{\sqrt{2}}{2} = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је површина *AIGH* једнака $a^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Слично за *CDEJ* [**7 поена**]. Из једнакокраког правоуглог троугла *ABI* је $BI = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, а одговарајућа висина је једнака страници осмоугла (*BC* или *GF*), па је површина *BJFI* једнака $a^2\sqrt{2}$ [**7 поена**].

5. Задатак се своди на представљање броја 31,2% у облику производа $p\% \cdot q\%$, $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$. Како је $31{,}2\% = \dfrac{3120}{10000} = \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13}{100 \cdot 100}$ [**4 поена**], то се добијају следеће 4 могућности: $\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{100} \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 13}{100} = 40\% \cdot 78\%$; $\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{100} \cdot \dfrac{5 \cdot 13}{100} = 48\% \cdot 65\%$;

$\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{100} \cdot \dfrac{3 \cdot 13}{100} = 80\% \cdot 39\%$; $\dfrac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{100} \cdot \dfrac{2 \cdot 2 \cdot 13}{100} = 60\% \cdot 52\%$ [Свако решење **по 4 поена**].